MA 2223 ALG 3. ABRIL-JULIO 2006.
PROBLEMARIO 2

Salvo mención contraria, V es un espacio con producto interno.

1. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vectores no-nulos y mutuamente ortogonales de V. Suponer además que el conjunto de los $\vec{v}_i$ tiene la propiedad siguiente, llamada *completitud*: si $\vec{v} \in V$ y $< \vec{v}, \vec{v}_i >= 0$, $i = 1 \ldots n$ entonces $\vec{v} = \vec{0}$. (Es decir, el único vector ortogonal a todos los $\vec{v}_i$ es $\vec{0}$.) Probar que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V. (Ayuda. Usar el teorema de Gram-Schmidt).

2. Usar el proceso de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ (con el producto punto) a partir de la base $\{(0,3,4),(2,0,0),((0,1,1)\}$. Hallar una base ortogonal de $\mathbf{R}^2$ con el producto interno $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 x_2 + (1/2)(x_1 y_2 + x_2 y_1) + y_1 y_2$.

3. ¿ Cierto o falso? Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ satisfacen $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$ entonces $\vec{u} \perp \vec{w}$.

4. En $\mathbf{R}^4$, sea $W = span\{((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$. Hallar una base ortogonal de W y una base ortonormal de $W^{\perp}$.

5. Suponer que V tiene dimensión finita n y sea W un subespacio de V de dimensión k.

   (a) Probar que existe una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de V tal que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es una base ortonormal de W.

   (b) Sea $\vec{v} \in V$, y sea $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$ (siendo los a_i escalares, por supuesto). Sea $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i$, de manera que $\vec{u} \in W$. Probar que $\vec{u}$ es el vector de W mas cerca a $\vec{v}$, en el sentido que, $\forall \vec{w} \in W$, $||\vec{v} - \vec{u}|| \leq ||\vec{v} - \vec{w}||$. Probar además que $\vec{v} - \vec{u} \in W^{\perp}$.

   (c) Ilustrar tomando W (i) un plano (ii) una recta, en $\mathbf{R}^3$.

6. Hallar una descomposición Q-R para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Hallar la matriz del operador ortogonal de proyección $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ donde $V \subset \mathbf{R}^3$ es: (i) $span\{(1,2,2),(0,1,-1)\}$; (ii) el plano $x - 2y + 3z = 0$; (iii) $span\{(1,2,-4)\}$.

8. Sea $V = C([-1,1], \mathbf{R})$ ccon el producto interno $< f, g >= \int_{-1}^{1} fg dx$. Sea $f \in V : f(-x) = -f(x)$ el subespacio de funciones impares. Hallar el complemento ortogonal de W en V.

9. Sea $W = span\{(2,1,0),(2,3,1)\} \subset \mathbf{R}^3$. Describir todos los subespacios $W^* \subset \mathbf{R}^3$ tales que $\mathbf{R}^3 = W \oplus W^*$.

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita (no necesariamente con producto interno), y sean W_1, W_2 subespacios de V. Probar que $V = W_1 \oplus W_2$ si y solo si la unión de una base de W_1 y una base de W_2 es una base de V.